

ROGÉRIO JORGE

PARADOXOS EM
BURACOS NEGROS

Conteúdos

Introdução	5
Da Teoria Tensorial às Equações de Campo de Einstein	7
Buraco Negro de Schwarzschild	17
Campos Quânticos em Espaços Curvos	25
Termodinâmica de Buracos Negros	31
Conservação da Informação	43
Complementaridade vs Firewall	49
Bibliografia	55

Introdução

Quando se discute um tema tão vasto como Buracos Negros, o leque de estudo é muito grande, sendo um tópico em grande investigação desde há várias décadas.

De modo a obter uma descrição detalhada sobre o debate entre *black hole complementarity* e *firewall*, será necessário familiarizar-nos com a mecânica de Buracos Negros, oferecendo este trabalho uma perspectiva geral sobre a descrição "clássica" e navegando sobre o mecanismo semi-clássico do comportamento local descrição de um Buraco Negro, utilizando conceitos que advêm da Teoria Quântica dos Campos.

No capítulo 1 são apresentadas as equações "base" a utilizar, teoremas e corolários importantes, chegando às Equações de Campo de Einstein. É introduzido o conceito de tensor, tensor métrico e derivada covariante.

No capítulo 2 é deduzida a solução original de Schwarzschild, aplicando sucessivas transformações de coordenadas chegando à representação do espaço tempo num Diagrama de Penrose-Carter.

Através da construção da acção de Klein-Gordon num espaço-tempo curvo, encontramos as equações do movimento e considerações fundamentais sobre o comportamento de um pacote de onda no horizonte de eventos de um Buraco Negro no capítulo 3.

No capítulo 4 apresentam-se resultados fundamentais da termodinâmica de Buracos Negros, como o conceito de temperatura de Unruh, Radiação de Hawking e entropia de um buraco negro.

Percorrendo a história da "Black Hole Wars" liderada por eminentes físicos como Leonard Susskind e Stephen Hawking, estudamos o paradoxo da Conservação da Informação no capítulo 5. O conceito de complementaridade e a ideia emergente de "parede de fogo" (*Firewall*) é descrita no capítulo 6.

Este trabalho foi realizado no âmbito da cadeira de Tópicos em Relatividade Geral com o Professor José Sande Lemos.

Da Teoria Tensorial às Equações de Campo de Einstein

Considerações Gerais sobre Tensores - de acordo com [1]

As coordenadas de um ponto em \mathbb{R}^n denotam-se por $(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$. De modo a definir coordenadas curvilíneas, supomos que o sistema de coordenadas cartesianas² e o novo sistema de coordenadas estão relacionados por uma aplicação

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (1)$$

sendo esta de classe C^2 e real. Aqui definimos 3 denominações para a aplicação

- Aplicação linear \rightarrow as novas coordenadas \bar{x}^i são chamadas de **coordenadas afim**
- Aplicação bijectiva \rightarrow **transformação de coordenadas**
- x^i são coordenadas cartesianas $\rightarrow \bar{x}^i$ são **coordenadas curvilíneas**.

As coordenadas mais utilizadas são apresentadas em baixo. Aqui definimos a ordem inversa, em que x^i é o sistema de coordenadas curvilíneas.

- **Coordenadas Polares** - $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = (x, y)$ e $(x^1, x^2) = (r, \theta)$ com $(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = (x^1 \cos(x^2), x^1 \sin(x^2))$
- **Coordenadas Cilíndricas** - $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (x, y, z)$ e $(x^1, x^2) = (r, \theta, z)$ com $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (x^1 \cos(x^2), x^1 \sin(x^2), x^3)$
- **Coordenadas Esféricas** - $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (x, y, z)$ e $(x^1, x^2) = (r, \theta, \phi)$ com $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = (x^1 \sin(x^2) \cos(x^3), x^1 \sin(x^2) \sin(x^3), x^1 \cos(x^2))$

As transformações de coordenadas são extremamente úteis. Por exemplo, é sabido que em coordenadas cartesianas a equação de um

¹ David C. Kay. *Tensor Calculus*. McGraw-Hill, 1988

² Um sistema de coordenadas é dito cartesiano caso a distância entre dois pontos $P(x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $Q(y^1, y^2, \dots, y^n)$ seja dada por $\sqrt{\sum_{i,j} \delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j}$ onde $\Delta x^i := x^i - y^i$ e δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caso } i = j \\ 0, & \text{caso } i \neq j \end{cases}$$

círculo de raio é dada por

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2$$

enquanto que em coordenadas polares temos apenas $x^1 = a$. Em equações diferenciais também podemos ter mudanças dramáticas, simplificando o problema para uma solução analítica simples.

Esta ideia de mudança de coordenadas mudar a descrição do fenómeno em estudo está na base da caracterização de um tensor e da teoria da Relatividade Geral.

Tensores de Primeira Ordem

Considere-se um campo vectorial $\mathbf{V} = V^i(\mathbf{x})$, em que cada componente é uma função escalar em que \mathbf{x} varia num subconjunto de \mathbb{R}^n . Expressamos as n componentes V^1, V^2, \dots, V^n de \mathbf{V} como n funções reais

$$T^1, T^2, \dots, T^N \quad \text{no sistema}(x^i)$$

e

$$\bar{T}^1, \bar{T}^2, \dots, \bar{T}^n \quad \text{no sistema}(\bar{x}^i)$$

Definição 1. O campo vectorial \mathbf{V} é um *tensor contravariante de ordem 1* caso as suas componentes obedeam a

$$\bar{T}^i = \sum_r T^r \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} = T^r \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \quad (2)$$

Aqui empregamos a **convenção de Einstein**³, somando as componentes com índices repetidos.

$$^3 \sum_i T^i S_i = T^i S_i$$

Nota Caso $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^a} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^a} = \delta_{ia}$$

onde utilizou-se a regra da cadeia na penúltima igualdade.

Definição 2. O campo vectorial \mathbf{V} é um *tensor covariante de ordem 1* caso as suas componentes obedeam a

$$\bar{T}_i = T_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \quad (3)$$

Desta definição advém o uso de índices superiores e inferiores.

Exemplo 1. Vector Tangente

Definimos o vector tangente $\mathbf{T} = T^i$ como

$$T^i = \frac{dx^i}{dt}$$

Sob uma mudança de coordenadas (2), cada coordenada $\bar{x} = \bar{x}^i(t)$, logo, pela regra da cadeia

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{dx^r}{dt}$$

Definindo $\bar{T}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt}$ obtém-se

$$\bar{T}^i = T^r \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$$

provando que \mathbf{T} é um vector contravariante. Concluimos assim que sob uma mudança geral de coordenadas, o vector tangente de uma curva (bem comportada) transforma-se como um tensor contravariante de ordem 1.

Exemplo 2. *Vector Normal*

Denotando $F(\mathbf{x})$ como uma campo escalar diferenciável num sistema de coordenadas (x^i) em \mathbb{R} . O gradiente de F é definido como

$$\nabla F := \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n} \right)$$

Num outro sistema de coordenadas, o gradiente de F é dado por

$$\bar{\nabla} F := \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^1}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^2}, \dots, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^n} \right)$$

Aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial F}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$

provando que o gradiente é um vector covariante (com $T_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ e $\bar{T}_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i}$).

Teorema 1. *Sejam S^i e T_i as componentes de um vector covariante e contravariante respectivamente. Caso o produto interno $E := S^r T_r$ estiver definido em cada sistema de coordenadas, então E é um invariante.*

Prova Utilizando a definição de vector covariante e contravariante, juntamente com a regra da cadeia

$$E = \bar{S}^r \bar{T}_r = S^i \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} T_a \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} = S^i T_a \delta_{ia} = S^i T_i$$

□

Tensores de Ordem Superior

Para definir um tensor de ordem arbitrária, temos que generalizar a noção de vector. Sabemos que um elemento T_{ij} pode ser descrito por uma matriz, especificando a linha i e a coluna j . Em regra geral, podemos ter p índices em cima (ordem de contravariância p) e q índices em baixo (ordem de covariância q).

Definição 3. *Tensor de ordem arbitrária*

$$\bar{T}_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} = T_{s_1 s_2 \dots s_p}^{r_1 r_2 \dots r_p} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{r_2}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \dots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}$$

É simples de notar que a soma de 2 tensores com ordem de contravariância e covariância p e q também será um tensor com a mesma ordem respectiva. Uma operação que nos vai ser útil é a **contração** de um tensor, em que somamos num par índices (covariante e contravariante), diminuindo em -1 cada uma das respectivas ordens⁴.

$${}^4 S^a = S_b^{ab} = S_1^{a1} + \dots S_n^{an}$$

Tensor Métrico

Nesta secção, vamo-nos apenas inteirar do conceito de distância em matemática. O cálculo tensorial oferece uma ferramenta natural para investigar formulações gerais sobre a distância, que estão intimamente ligadas com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Começando com a distância num sistema de coordenadas cartesianas, podemos calcular a distância entre um ponto a e um ponto b através da fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \quad (4)$$

A equação (4) tem a seguinte forma diferencial que contém a mesma informação

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (5)$$

Neste caso, em frente de cada coordenada dx^i temos o valor 1, que é o simples teorema de pitágoras. Em geral, não é isto que acontece em espaços curvos, obtendo ao invés de um δ_{ij} o chamado **tensor métrico** g_{ij} .

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (6)$$

Prova-se que g_{ij} tem o carácter tensorial de um tensor covariante de ordem 2. Este também se prova útil quando queremos baixar ou subir índices de tensores com uma ordem arbitrária

$$T^i = g^{ij} T_j$$

Deste facto, encontramos o seguinte resultado

$$g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j \quad (7)$$

Derivada de um Tensor

Considerando um tensor contravariante $\mathbf{T} = (T^i(\mathbf{x}(t)))$ definido numa curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, podemos diferenciar a lei de transformação

$$\bar{T}^i = T^r \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}$$

em relação a t , obtendo

$$\frac{d\bar{T}^i}{dt} = \frac{dT^r}{dt} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} + T^r \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^s \partial x^r} \frac{dx^s}{dt} \quad (8)$$

o que mostra que a derivada é um tensor contravariante apenas quando a transformação de coordenadas for linear.

Definição 4. Símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{ir}}{2} \left(\frac{\partial g^{kr}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{rj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^r} \right)$$

Dada a simetria do tensor métrico, concluímos que o símbolo de Christoffel é simétrico nos dois primeiros índices (jk) e que todas as componentes do símbolo de Christoffel se anulam num sistema de coordenadas particular caso o tensor métrico tenha componentes constantes nesse sistema (a que chamamos **coordenadas geodésicas**).

Através de permutações cíclicas da definição de Γ_{jk}^i obtemos a relação

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} \quad (9)$$

onde $\Gamma_{ijk} = g_{kr} \Gamma_{ij}^r$. Através da transformação de $\bar{\Gamma}_{ij}^r$ deduzimos que este não se transforma como um tensor.

Definição 5. Derivada Covariante

$$\begin{aligned} \nabla_k T_i &= T_{i,k} := \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^l T_l \\ \nabla_k T^i &= T^i_{,k} := \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i T^l \end{aligned}$$

A derivada covariante de um tensor é também ela um tensor, subindo a ordem covariante do tensor em 1. Uma definição que também nos será útil adiante é a de derivada absoluta ao longo de uma curva. Prova-se que o único tensor que se pode deduzir de um dado tensor dado (T^i) que coincide com a derivada ordinária ($\frac{dT^i}{dt}$) num sistema de coordenadas cartesiano é a derivada absoluta do tensor ao longo dessa curva.

Definição 6. Derivada Absoluta ao Longo de uma Curva $x^i = x^i(t)$

$$\frac{\delta T^i}{\delta t} := \frac{dT^i}{dt} + \Gamma_{rs}^i T^r \frac{dx^s}{dt}$$

Geodésicas

Definindo o Lagrangiano de um sistema como (em que s é a variável de parametrização da curva)

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{ab} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds}} \quad (10)$$

podemos aplicar as equações de Euler-Lagrange e efectuar uma mudança de coordenadas por um parâmetro afim a este Lagrangiano, obtendo

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{pq}^i \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0 \quad (11)$$

Tensor de Riemann

O tensor de Riemann emerge da análise da derivada covariante de V_i em relação a x^j e depois a x^k . Será que a ordem da diferenciação interessa? A diferença entre as duas vai definir um tensor de Riemann.

Definição 7. *Tensor de Riemann*

$$V_{j,kl} - V_{j,lk} = R_{jkl}^i V_i$$

$$R_{jkl}^i := \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^r \Gamma_{rk}^i - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{rl}^i$$

sendo este um tensor de 4ª ordem que depende das segundas derivadas da métrica. Podemos construir o tensor de Riemann de segunda ordem através da operação

$$R_{ijkl} := g_{ir} R_{jkl}^r$$

Tensor de Ricci

Este tensor é definido como a contracção do tensor de Riemann

Definição 8. *Tensor de Ricci*

$$R_{ij} := R_{ijk}^k$$

$$R_j^i := g^{ik} R_{kj}$$

A partir deste tensor, podemos definir o seguinte escalar

Definição 9. *Curvatura de Ricci*

$$R := R_j^j$$

Outro tensor também importante na teoria da Relatividade Geral é o tensor de Einstein, sendo este definido através dos tensores acima.

Definição 10. *Tensor de Einstein*

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{g_{ij}}{2}R$$

Este tensor tem uma propriedade importante de que a sua derivada covariante é 0 para todos os pontos.

Equações de Campo de Einstein - de acordo com [5]

Estas equações de campo de Einstein são válidas na presença de outros campos em interação. Queremos descrever campos gravíticos, em que a relatividade restrita está presente mas o limite não relativista implica as equações do movimento de Newton. Os outros campos em interação são descritos pelo **Tensor de Energia Momento** T^{ab} . O princípio de conservação de energia implica que a divergência deste tensor (no caso tensorial temos a substituição pela derivada covariante) é 0.

Actuando T^{ab} como um termo fonte para o campo gravitacional, queremos encontrar uma equação com o lado direito T^{ab} e o lado esquerdo um tensor também com dois índices contravariantes e que a sua derivada covariante seja nula. Como vimos acima, podemos então fazer a equivalência

$$G^{ab} = 8\pi T^{ab} \quad (12)$$

com o factor 8π introduzido para no limite não relativista obtermos a equação de Poisson. O conjunto de equações (12) são as chamadas **Equações de Campo de Einstein** em unidades relativísticas ($c = G = 1$).

A interpretação é muito simples e resume-se às palavras de John Archibald Wheeler: "Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve"(o espaço-tempo diz à matéria como se mover, a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar).

Este conjunto de equações também pode ser deduzido a partir do Lagrangiano apresentado por Hilbert

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R + \mathcal{L}_{mat} \quad (13)$$

onde $g = \det(g_{ij})$ e \mathcal{L}_{mat} foi introduzido para obter o tensor de energia momento do lado direito das equações de campo.

⁵ Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992. ISBN 0-19-859686-3

Equações do Movimento

De modo a encontrar as equações do movimento associadas sem recorrer à forma complicada das equações de Euler-Lagrange, definimos

$$2K := g_{ab} \frac{dx^a}{du} \frac{dx^b}{du} = \alpha \quad (14)$$

em que α será 0, 1 ou -1 caso o vector tangente seja nulo, positivo ou negativo (geodésicas nulas, do tipo espaço ou do tipo tempo). As equações pretendidas serão dadas por

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} = \frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \left(\frac{dx^a}{du} \right)} \right) \quad (15)$$

Princípios Fundamentais

Para obter uma teoria consistente a partir de primeiros princípios, enumeram-se alguns princípios necessários a uma formulação axiomática da Teoria da Relatividade Geral.

Ideias de Mach

- A distribuição da matéria determina a geometria
- Caso não exista matéria, não existe geometria
- Um corpo num universo vazio não deve possuir propriedades inerciais

Princípio da Equivalência

- O movimento de uma partícula teste num campo gravitacional é independente da sua massa e da sua composição
- O campo gravitacional está acoplado a "tudo"
- Não existem experiências que consigam distinguir queda-livre (não rotacional) num campo gravítico de movimento uniformemente acelerado na ausência de um campo gravítico
- Um referencial acelerado linearmente relativo a um referencial inercial em relatividade restrita é localmente idêntico a um referencial em repouso num campo gravitacional

Princípio da Covariância Geral

- Todos os observadores são equivalentes
- As equações da física deverão ter uma forma tensorial

Princípio do Acoplamento Gravitacional Mínimo

- Nenhum termo contendo explicitamente o tensor de curvatura deverá ser adicionado na transição de relatividade restrita para relatividade geral

Buraco Negro de Schwarzschild

Dedução Heurística - como em [6]

Começando com uma massa M , esta cria um potencial gravítico que, a uma distância r é dado por

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (16)$$

Pegando numa colecção de referenciais inerciais estacionários no infinito, deixamo-los cair em queda livre. De acordo com Newton, estes vão obter uma velocidade dada por⁷

$$\mathbf{v} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}\hat{r} \quad (17)$$

Localmente, aproximamos a métrica como Mikowskiana. Este resultado é válido a caso o objecto possua uma massa pequena e a distância r em consideração seja muito grande.

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (18)$$

Podemos relacionar estas coordenadas com um sistema de coordenadas fixo no infinito espacial (estrelas fixas de Mach). Através de uma transformação de Galileu (assumindo que as velocidades são pequenas), o intervalo de tempo dt será o mesmo nos dois referenciais $dt = d\bar{t}$ e o intervalo de tempo relaciona-se por

$$dx = d\bar{x} - \mathbf{v}d\bar{t} \quad (19)$$

Substituindo (19) em (18) obtemos

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + ||d\bar{x} - \mathbf{v}d\bar{t}||^2 \quad (20)$$

Notando que o intervalo invariante é o mesmo nos dois referenciais, podemos retirar as barras das coordenadas e expandir o módulo obtendo

$$ds^2 = -(1 - v^2)dt^2 - 2\mathbf{v}\cdot dxdt + ||dx||^2 \quad (21)$$

⁶ Matt Visser. Heuristic approach to schwarzschild geometry. 2004

⁷ Continuamos com a convenção $c = G = 1$.

Inserindo (17) em (21) e expandindo o módulo de dx em coordenadas esféricas, obtemos a métrica final

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}drdt + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (22)$$

Esta não é mais do que a métrica de Schwarzschild no sistema de coordenadas de Painlevé-Gullstrand. É uma solução de (12) no vácuo. De modo a obter a forma mais conhecida desta métrica, efectuamos uma mudança de coordenadas

$$dt_{Schwarzschild} = dt - \frac{\sqrt{2M/r}}{1 - 2M/r}dr \quad (23)$$

obtendo a famosa métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (24)$$

Singularidades

De modo a determinar se a nossa solução possui realmente uma singularidade em $r = 2M$, procuramos qual a equação do movimento para um observador em queda livre do ponto de vista de um referencial fixo com coordenada temporal t e do ponto de vista do referencial próprio com coordenada temporal τ . Esta dedução pode ser encontrada em [8].

De acordo com (15), procuramos equações do movimento para uma partícula em queda-livre radial, no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Substituindo (24) em (14) e (15) obtemos para o referencial próprio

$$\ddot{r} = -\frac{M}{r^2} \quad (25)$$

em que escolhemos $\alpha = 1$ (geodésica do tipo tempo), e as constantes de integração de modo a obter as mesmas equação que o movimento em queda-livre de Newton. A interpretação é um pouco diferente: r é a coordenada de Schwarzschild ao invés de uma coordenada esférica plana e as derivadas a efectuar são em relação ao tempo próprio τ ao invés de t . A solução de (25) é dada por

$$\tau(r) = \frac{-2}{3\sqrt{2M}}(r^{3/2} - r_0^{3/2}) \quad (26)$$

iniciando a partícula o movimento em r_0 e caindo até $r \rightarrow 0$.

O que um observador no infinito observa é muito diferente. Mudamos de $\tau(r)$ para $t(r)$. Pela definição de tempo próprio temos que $ds^2 = d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2$ pois o intervalo ds^2 é um invariante e

⁸ Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992. ISBN 0-19-859686-3

o referencial próprio não possui velocidade em relação ao próprio observador ($dx = dy = dz = 0$). Assim,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}} \left(-\sqrt{\frac{r}{2M}}\right) \quad (27)$$

A solução de (27) é dada por

$$t(r) = \sqrt{\frac{2}{9M}} (\sqrt{r}(6M+r) - \sqrt{r_0}(6M+r_0)) + 2M \left[\ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r}}}\right) - \ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{2M}{r_0}}}{1 + \sqrt{\frac{2M}{r_0}}}\right) \right] \quad (28)$$

As duas soluções são muito diferentes. No referencial próprio, observador chega a $r = 0$ num tempo finito, nomeadamente

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} r_0 \sqrt{\frac{r_0}{2M}} \quad (29)$$

Este observador, não encontra nada de especial no horizonte⁹. É sensível não às componentes da métrica mas às componentes da curvatura (forças de maré). Estas são dadas por

$$R_{\tau\theta\tau\theta} = R_{\tau\phi\tau\phi} = -R_{r\theta r\theta} = -R_{r\phi r\phi} = \frac{M}{r^3} \quad (30a)$$

$$R_{\theta\phi\theta\tau} = -R_{\tau r \tau r} = \frac{2M}{r^3} \quad (30b)$$

Logo, todas as componentes da curvatura no horizonte são finitas e da ordem

$$R(\text{Horizonte}) \approx \frac{1}{M^2} \quad (31)$$

Para um buraco negro massivo notamos que estas são tipicamente pequenas. Assim, um observador de eventos não nota nada de especial ao passar pelo horizonte de eventos. Por outro lado, existe uma singularidade verdadeira em $r \rightarrow 0$, onde a curvatura tende para infinito. Assim, as nossas leis clássicas falham neste ponto, precisando de outro tipo de descrição.

Para um observador que meça o tempo dado por (28), este vai para infinito à medida que $r \rightarrow 2M$. Logo, um sinal originado no horizonte, demora um tempo de Schwarzschild infinito para chegar a qualquer ponto $r > 2M$.

Métrica junto do Horizonte - Espaço de Rindler

Esta métrica é obtida pela substituição de r por uma coordenada ρ que mede a distância própria desde o horizonte¹⁰

⁹ Denotamos por horizonte de eventos o local onde $r = 2M$

¹⁰ Todos os cálculos estão detalhadamente reproduzidos em

James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4

$$\rho = \int_{2M}^r \sqrt{g_{rr}(r')} dr' = \sqrt{r(r-2M)} + 2M \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} \right) \quad (32)$$

Perto do horizonte, ρ comporta-se como

$$\rho \approx 2\sqrt{2M(r-2M)} \quad (33)$$

Substituindo na métrica, obtém-se

$$ds^2 \simeq \rho^2 \left(\frac{dt}{4M} \right)^2 - d\rho^2 - r(\rho)^2 d\Omega^2 \quad (34)$$

Além disso, estamos interessados apenas numa pequena região angular do horizonte, centrada em $\theta = 0$. Podemos então substituir as coordenadas angulares por coordenadas cartesianas¹¹. Introduzindo um tempo adimensional w

$$w = \frac{t}{4M} \quad (35)$$

a métrica fica com a forma

$$ds^2 = \rho^2 dw^2 - d\rho^2 - dx^2 - dy^2 \quad (36)$$

APROXIMAÇÃO DE RINDLER

É evidente que na métrica (36) ρ e w são a coordenada radial e variáveis de ângulos hiperbólicos no espaço de Minkowski. Introduzindo a substituição

$$T = \rho \sinh(w) \quad (37a)$$

$$Z = \rho \cosh(w) \quad (37b)$$

obtemos a familiar métrica de Minkowski

$$ds^2 = dT^2 - dZ^2 - dX^2 - dY^2 \quad (38)$$

Com a métrica obtida, podemos aproximar a região perto do horizonte de eventos pelo espaço de Minkowski. Esta região é chamada o espaço de Rindler e a coordenada w é o tempo de Rindler. É de notar que uma translação no tempo de Rindler $w \rightarrow w + \text{cons}$ é equivalente a um boost de Lorentz no espaço de Minkowski.

Esta métrica vai de acordo com o que foi falado anteriormente, em que a região perto do horizonte não é uma zona especial e que localmente pode ser aproximada como um espaço-tempo de Minkowski.

¹¹ Com a aproximação $\sin(\theta) \approx \theta$ temos em coordenadas esféricas

$$x = 2M\theta \cos(\phi)$$

$$y = 2M\theta \sin(\phi)$$

Diagramas de Penrose

Como vimos, existem regiões do espaço-tempo que podem ser aproximadas por variedades com alto grau de simetria. Seria muito proveitoso caso fosse possível desenhar diagramas de espaço-tempo que capturem as propriedades globais e a estrutura causal de uma métrica suficientemente simétrica. O que é necessário fazer é uma transformação conforme que passe toda a nossa variedade para uma região compacta que traga esta variedade para um diagrama finito 2-dimensional. Um diagrama deste tipo é designado **diagrama de Penrose-Carter**.

TRANSFORMAÇÕES CONFORMES- -SEGUNDO [12]

Duas métricas g_{ab} e \bar{g}_{ab} são "conformes" uma à outra caso

$$\bar{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \quad (39)$$

onde $\Omega(x)$ é uma função diferente de 0 e diferenciável. As geodésicas nulas de uma métrica coincidem com as geodésicas nulas da outra. Uma métrica diz-se "conforme plana" caso possa ser reduzida à forma

$$g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab} \quad (40)$$

onde η_{ab} é a métrica do espaço plano.

Teorema 2. *Qualquer variedade de Riemann a duas dimensões é conforme plana.*

Através de uma escolha apropriada de Ω^2 , pode ser possível "trazer" os pontos no infinito para uma posição finita e assim estudar a estrutura causal do infinito.

DIAGRAMAS DE PENROSE PARA O ESPAÇO DE MINKOWSKI

Todos os cálculos estão de acordo com [13]. Começando com a métrica do espaço de Minkowski em coordenadas polares

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (41)$$

temos para as variáveis r e t os intervalos

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty \quad (42)$$

De modo a obter coordenadas com intervalos finitos, vamos efectuar a mudança para coordenadas nulas

$$u = t - r, \quad v = t + r \quad (43a)$$

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \quad u \leq v \quad (43b)$$

¹² Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992. ISBN 0-19-859686-3

¹³ Ewa Felinska. Carter-penrose diagrams and black holes. <http://www.ift.uni.wroc.pl/~blaschke/master/Felinska.pdf>

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2 \quad (43c)$$

Podemos "trazer o infinito para o finito" através da função \arctan :

$$U = \arctan(u) , \quad V = \arctan(v) \quad (44a)$$

$$-\pi/2 < U < \pi/2 , \quad -\pi/2 < V < \pi/2 , \quad U \leq V \quad (44b)$$

$$ds^2 = \frac{1}{4\cos^2(U)\cos^2(V)} [-2(dUdV + dVdU) + \sin^2(V - U)d\Omega^2] \quad (44c)$$

Transformando de volta as coordenadas nulas para coordenadas do tipo tempo T e radial R

$$T = U + V , \quad R = V - U \quad (45a)$$

$$0 \leq R < \pi , \quad |T| + R < \pi \quad (45b)$$

$$ds^2 = w^{-2}(T, R)(-dT^2 + dR^2 \sin^2(R)d\Omega^2) \quad (45c)$$

$$w(T, R) = 2\cos(U)\cos(V) = \cos(T) + \cos(R) \quad (45d)$$

Finalmente, a métrica de Minkowski original está relacionada com a nova métrica através do factor conforme $w^2(T, R)$.

A estrutura do diagrama conformal permite-nos dividir infinitos conformes em diferentes regiões

- i^+ = infinito temporal do tipo tempo no futuro ($T = \pi, R = 0$)
- i^0 = infinito espacial ($T = 0, R = \pi$)
- i^- = infinito temporal do tipo tempo no passado ($T = -\pi, R = 0$)
- \mathcal{T}^+ = infinito no futuro nulo ($T = \pi - R, 0 < R < \pi$)
- \mathcal{T}^- = infinito no passado nulo ($T = -\pi + R, 0 < R < \pi$)

Observando a figura (2), notamos que atingimos o nosso objectivo. Temos o infinito espacial e temporal nos pontos i^+, i^0 e i^- .

O diagrama conformal do espaço tempo de Minkowski contém um número características importantes:

- As geodésicas nulas estão a ângulos de $\pm 45^\circ$ no diagrama.
- Todas as geodésicas do tipo tempo começam em i^- e acabam em i^+ .

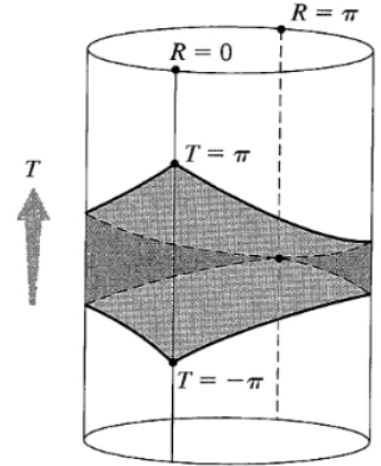


Figura 1: Universo estático de Einstein representado num cilindro. A figura a sombreado está relacionada por uma transformação conforme ao espaço de Minkowski

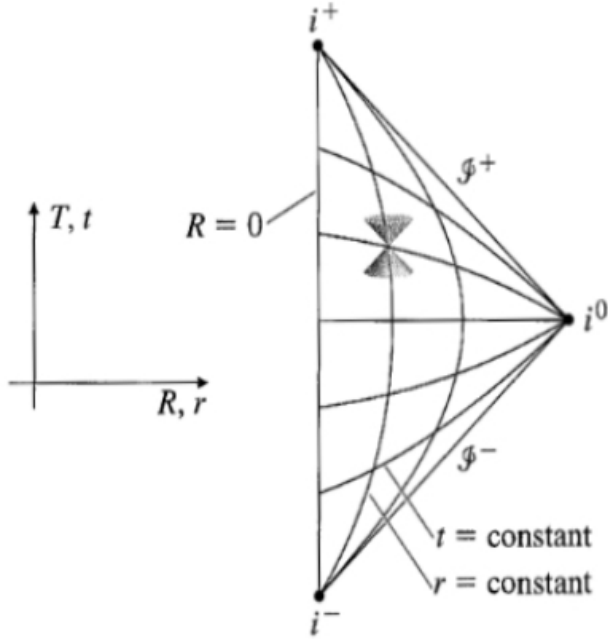


Figura 2: Diagrama conformal para o espaço-tempo de Minkowski. Os cones de luz estão a ângulos de $\pm 45^\circ$ ao longo do diagrama.

- Todas as geodésicas nulas começam em \mathcal{T}^- e acabam em \mathcal{T}^+ .
- Todas as geodésicas do tipo espaço começam e acabam em i^0 .

DIAGRAMAS DE PENROSE PARA O BURACO NEGRO DE SCHWARZSCHILD

Vamos efectuar exactamente o mesmo processo para a métrica de Schwarzschild. Primeiro efectuamos uma mudança para coordenadas de Kruskal nulas, definidas por

$$u'v' = \left(\frac{r}{2M-1}\right)e^{r/2M} \quad (46a)$$

$$ds^2 = -\frac{16M^3}{r}e^{-r/2M}(du'dv' + dv'du') + r^2d\Omega^2 \quad (46b)$$

Depois efectuamos a mesma transformação utilizada anteriormente para trazer o "infinito para o finito":

$$u'' = \arctan\left(\frac{u'}{\sqrt{2M}}\right), \quad v'' = \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2M}}\right) \quad (47a)$$

$$-\pi/2 < u'' < \pi/2, \quad -\pi/2 < v'' < \pi/2, \quad -\pi < u'' + v'' < \pi \quad (47b)$$

A componente (u'', v'') da métrica (sem as coordenadas angulares) é agora conforme ao espaço-tempo de Minkowski. Nas novas coordenadas, as singularidades em $r = 0$ são rectas que têm origem no infinito do tipo tempo de uma região para outra.

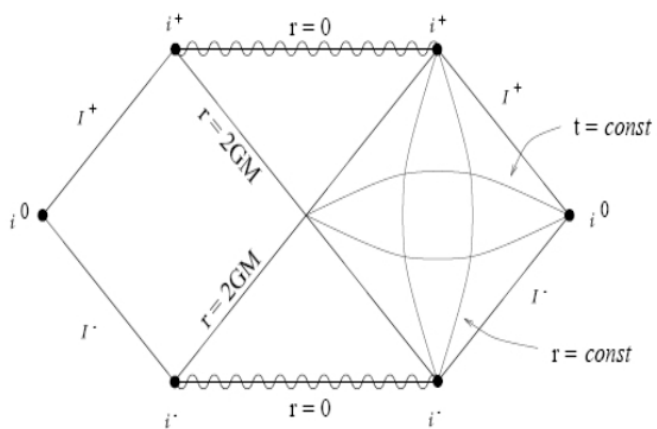


Figura 3: Diagrama de penrose para um buraco negro de Schwarzschild

Campos Quânticos em Espaços Curvos

DEDUÇÕES SEGUNDO [14]

Estamos interessados em ver qual o comportamento local de um campo escalar (sem spin) perto do horizonte de eventos.

Considere-se um campo de Klein-Gordon sem massa χ num espaço de Schwarzschild. Por uma questão de simplicidade, vamos utilizar coordenadas *tortoise*. Estas são obtidas a partir da métrica de Schwarzschild, com a transformação de $r \rightarrow r^*$

$$\frac{dr}{dr^*} = 1 - \frac{2M}{r} = F(r) \quad (48)$$

Obtemos assim a métrica

$$ds^2 = F(r^*)[dt^2 - (dr^*)^2] - r^2[d\theta^2 \sin^2(\theta) + d\phi^2] \quad (49)$$

A acção de Klein-Gordon para um campo escalar é dada por $I = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi$. Logo, num espaço tempo curvo generalizamos para

$$I = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi \quad (50)$$

Temos que $\sqrt{-g} = Fr^2 \sin(\theta)$. Através da substituição de $\psi = r\chi$ ficamos com a acção da forma

$$I = \frac{1}{2} \int [(\partial_t \psi)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r^*} - \frac{\partial(\ln(r))}{\partial r^*} \psi\right)^2 - \frac{F}{r^2} (\sin(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\right)^2\right)] dt dr^* d\theta d\phi \quad (51)$$

Integrando por partes o termo cruzado de $\left(\frac{\partial \psi}{\partial r^*} - \frac{\partial(\ln(r))}{\partial r^*} \psi\right)^2$ e com a introdução de harmónicas esféricas ¹⁵ obtemos

¹⁴ James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4

¹⁵ As harmónicas esféricas Y_{lm} têm como definição $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y_{lm}$

$$I = \sum_{lm} \frac{1}{2} \int [(\partial_t \psi_{lm})^2 - (\partial_{r^*} \psi_{lm})^2 - (\partial_{r^*} \ln(r))^2 \psi_{lm}^2 + \partial_{r^*}^2 \ln(r) \psi_{lm}^2 - \frac{F}{r^2} l(l+1) \psi_{lm}^2] dt dr^* \quad (52)$$

Utilizando a relação entre r e r^{*16} , obtemos uma simples acção para cada l, m

$$I_{lm} = \frac{1}{2} \int dt dr^* [(\partial_t \psi_{lm})^2 - (\partial_{r^*} \psi_{lm})^2 - V_l(r^*) \psi_{lm}^2] \quad (53)$$

com um potencial $V_l(r^*)$ dado por

$$V_l(r^*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right) \quad (54)$$

Variando a acção¹⁷ e introduzindo para a parte temporal de ψ o factor $e^{i\omega t}$ obtemos a seguinte equação do movimento

$$-\frac{\partial^2 \psi_{lm}}{(\partial r^*)^2} + V_l(r^*) \psi_{lm} = \omega^2 \psi_{lm} \quad (55)$$

Esta equação tem a forma da equação de Schrödinger para um campo com energia ω^2 . O potencial V é repulsivo para $r \gg 3M$ mas, à medida que o campo se aproxima do horizonte, o campo gravitacional atrai o pacote de ondas para o horizonte de eventos. O máximo de V é em

$$r_{max} = 3M \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{14l^2 + 14l + 9}{9l^2(l+1)^2}} \right) - \frac{1}{2l(l+1)} \right) \quad (56)$$

em que para grande l , o máximo ocorre em $r_{max} \approx 3M$. O mesmo potencial governa o movimento de partículas clássicas sem massa. Caso esta comece sem velocidade radial numa região $r < 3M$, irá adquirir um movimento em forma de espiral em direcção ao horizonte.

Considerando um campo quântico de frequência ω e momento angular l propagando-se de $r \approx 2M$ até à barreira em $r \approx 3M$, consegue este passar a barreira de potencial? Sem existir tunelamento, é necessária que a sua energia (ω^2) seja maior que a altura máxima da barreira.

Para $l = 0$ a altura máxima da barreira é dada por $V_{max} = \frac{1}{2M^2} \left(\frac{3}{8}\right)^3$. Uma onda deste tipo (tipo S) irá assim escapar caso

$$\omega < \frac{0.15}{M} \quad (57)$$

O mesmo caso aplica-se para uma partícula de $r \gg 3M$ em direcção ao horizonte de eventos. Para partículas menos energéticas, será necessário tunelar pela barreira.

¹⁶ $r^* = r + 2M \ln(r - 2M)$

¹⁷ Utiliza-se para $I = \int \mathcal{L} dt dr^*$ as equações do movimento $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} + \frac{\partial}{\partial r^*} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{r^*} \psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$

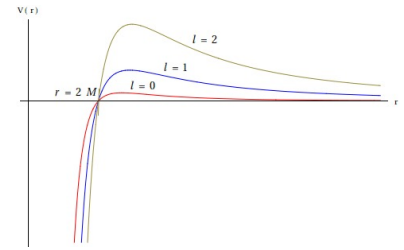


Figura 4: Potencial $V_l(r^*)$ para vários valores de l

Uma partícula de grande momento angular terá maior dificuldade em penetrar a barreira (entrando ou saindo de $r \approx 3M$). Para grande l temos $V_{max} \approx \frac{1}{27}l^2M^2$, logo para passar a barreira será necessário que

$$w > \frac{1}{\sqrt{27}} \frac{l}{M} \quad (58)$$

Perto do Horizonte

Aqui, a métrica de Schwarzschild é aproximadamente descrita pela métrica de Rindler

$$ds^2 = \rho^2 dw^2 - d\rho^2 - dX^2 - dY^2 \quad (59)$$

É conveniente substituir a coordenada ρ por uma coordenada do tipo *tortoise* de modo a obter deduções e equações o mais simples possível. Define-se

$$u = \log(\rho) \quad (60)$$

ficando com a métrica

$$ds^2 = e^{2u} [dw^2 - du^2] - dX^2 - dY^2 \quad (61)$$

A acção do campo escalar fica assim

$$I = \frac{1}{2} \int dXdYdudw [(\partial_w \chi)^2 - (\partial_u \chi)^2 - e^{2u} ((\partial_X \chi)^2 + (\partial_Y \chi)^2)] \quad (62)$$

Em vez de efectuar uma decomposição em harmónicas esféricas, decomposmos o campo em componente transversal (X, Y) na forma

$$\chi = \int dk_x dk_y e^{i(k_x X + k_y Y)} \chi(k_x, k_y, u, w) \quad (63)$$

com a acção para um dado número de onda k ¹⁸

¹⁸ Utilizamos $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

$$I = \frac{1}{2} \int dw du [(\partial_w \chi)^2 - (\partial_u \chi)^2 - k^2 e^{2u} \chi^2] \quad (64)$$

Vemos que o potencial é dado por $V(k, u) = k^2 e^{2u}$. Introduzindo um modo λ em χ como $e^{i\lambda w}$ obtemos a equação do movimento

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} + V(k, u) \chi = \lambda^2 \chi \quad (65)$$

em que o potencial é na mesma dado por

$$V(k, u) = k^2 e^{2u} \quad (66)$$

De novo temos uma equação do tipo de Schrödinger onde o potencial confina os quanta à região perto do horizonte (menos em $k = 0$). Qualitativamente, o comportamento difere da aproximação do espaço de Rindler na medida em que este potencial tem um "cutoff" quando $\rho = e^u$ é maior que M . No caso de Rindler V cresce indefinidamente com e^u .

Campos Quânticos num Universo em Expansão

Vamos aplicar o mesmo procedimento que os autores de [19] ao caso de um Universo de Robertson-Walker, em que a métrica é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) \right) \quad (67)$$

A acção de Klein-Gordon é na mesma dada por (50) com o termo $m^2 \chi^2$ para partículas massivas. Substituindo na métrica, efectuando a decomposição em harmónicas esféricas e substituindo $\psi = \frac{\chi}{r}$:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int dt dr a(t) \sqrt{1-kr^2} \left(-(\partial_r \psi_{lm})^2 + \frac{\psi_{lm}^2}{r^2} - \frac{a^2(t)}{1-kr^2} (-\psi_{lm}^2 m^2 + (\partial_t \psi_{lm})^2) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_{lm}^2 \right) \quad (68)$$

Efectuando a mesma integração por partes e introduzindo as novas coordenadas dadas por

$$\frac{d\eta}{dt} = a(t) \text{ e } \frac{dr^*}{dt} = \sqrt{1-kr^2} \quad (69)$$

chegamos à acção

$$I = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \int d\eta dr^* \left[(1-kr^2) \left(\frac{\partial \psi_{lm}}{\partial r^*} \right)^2 - \frac{a^4(t)}{1-kr^2} (\partial_\eta \psi_{lm})^2 + \left(\frac{l(l+1)+1}{r^2} + \frac{kr}{1-kr^2} - \frac{a^2(t)m^2}{1-kr^2} \right) \psi_{lm}^2 \right] \quad (70)$$

Daqui, extraímos as equações do movimento. De modo a ter uma equação do tipo Shrödinger, efectuamos a substituição para as novas variáveis dadas por

$$\frac{dr^*}{d\bar{r}} = 1 - kr^2 \text{ e } \frac{d\eta}{d\bar{\eta}} = a^4(t) \quad (71)$$

ficando com

$$-\frac{\partial^2 \psi_{lm}}{\partial \bar{r}^2} + V(\bar{r}) \psi = -\frac{\partial^2 \psi_{lm}}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{1}{a^4(t)} + a^2(t) m^2 \psi_{lm} = E \psi_{lm} \quad (72a)$$

onde

$$V(\bar{r}) = \frac{l(l+1)+1}{r^2} + kr - k(l(l+1)+1) \quad (72b)$$

¹⁹ James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4

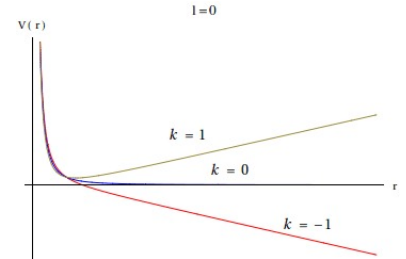


Figura 5: $V(r)$ para $l = 0$

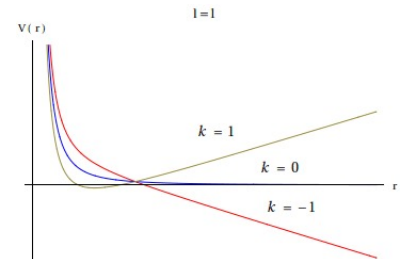


Figura 6: $V(r)$ para $l = 1$

À direita vemos como se comporta o potencial para diferentes valores de k e de l . Para r pequeno, os potenciais comportam-se da mesma maneira (repulsivos). Apenas para um universo com $k = 1$ é que temos um mínimo do potencial em

$$r_{max} = \sqrt{2(l(l+1)+1)} \quad (73)$$

Utilizando separação de variáveis²⁰, temos para a parte temporal da equação

$$-\frac{\partial^2 \psi(\bar{\eta})_{t_{lm}}}{\partial \bar{\eta}^2} \frac{1}{a^4(t)} = (E - a^2(t)m^2)\psi(\bar{\eta})_{t_{lm}} \quad (74)$$

Esta equação só pode ser resolvida/modelada especificando o factor de forma $a(t)$.

Modelo Einstein-de Sitter

Neste modelo cosmológico, considera-se $k = 0$ e a constante cosmológica $\Lambda = 0$. O factor de forma é dado por

$$a(t) = \left(\frac{9}{4}Ct^2\right)^{1/3} \quad (75)$$

em que C é uma constante positiva. Passando para a coordenada $\bar{\eta}$, temos das relações (69) e (71) que $\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \frac{1}{a(t)^3}$, logo

$$\bar{\eta} = -\frac{4}{9Ct} \text{ ou } a(\bar{\eta}) = \left(\frac{4}{9C\bar{\eta}^2}\right)^{1/3} \quad (76)$$

Substituindo em (74) obtém-se

$$-\frac{\partial^2 \psi_{t_{lm}}}{\partial \bar{\eta}^2} = \psi_{t_{lm}} Vt(\bar{\eta}) \quad (77)$$

A figura de $Vt(\bar{\eta})$ encontra-se representada à direita.

Modelo de de Sitter

Este é um modelo para um universo desprovido de matéria mas com uma constante cosmológica $\Lambda \neq 0$. O factor de forma é dado por

$$a(t) = e^{\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} t} \quad (78)$$

Aplicando o mesmo procedimento que anteriormente, chegamos a um potencial $Vt(\bar{\eta})$ dado pela figura à direita.

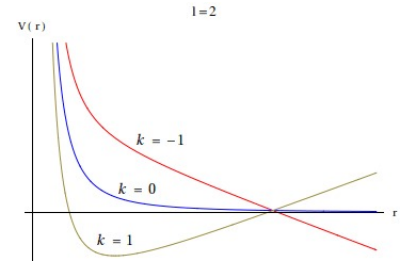


Figura 7: $V(r)$ para $l = 2$

$$^{20} \psi_{t_{lm}} = \psi_{t_{lm}}(\bar{\eta})\psi_{r_{lm}}(\bar{r})$$

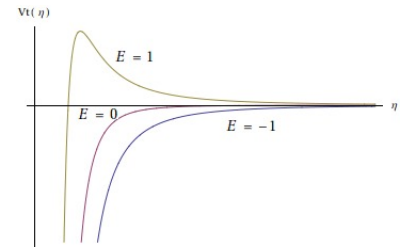


Figura 8: $Vt(\bar{\eta})$ para diferentes valores de energia

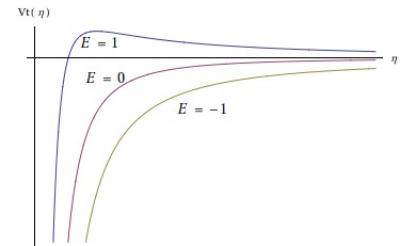


Figura 9: $Vt(\bar{\eta})$ para diferentes valores de energia

Comprimento de Planck

Esta secção é introduzida devido à evidência que existe actualmente de que a escala onde os efeitos de gravidade quântica são importantes é a escala de Planck. O comprimento de Planck é definido como

$$l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2} \approx 10^{-33} \text{cm} \quad (79)$$

A escala de energia correspondente é da ordem de 10^{19}GeV . Para ter uma ideia do efeito desta escala, podemos escrever a acção de Einstein-Hilbert como

$$I_{HE} = \left(\frac{\hbar}{19\pi L_P^2}\right) \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (80)$$

Para uma região do espaço-tempo com raio de curvatura L e volume L^4 a acção tem uma ordem de grandeza $\sim \hbar \left(\frac{L}{L_P}\right)^2$. Isto sugere que flutuações quânticas de raio menor que o raio de Planck não são desprezáveis.

Outra maneira de notar a significância do comprimento de Planck é como o comprimento mínimo localizado Δx , de tal modo que caso $\Delta x < L_P$ um buraco negro "engole" Δx . Para visualizar este efeito, notamos que a relação de incerteza implica $\Delta E > \hbar c / \Delta x$. Associada a esta incerteza na energia temos o raio de Schwarzschild $R_S(\Delta x) = 2G\Delta M/c^2 = 2G\Delta E/c^4$, logo em gravidade quântica $R_S(\Delta x) > L_P^2/\Delta x$. A incerteza em $R_S(\Delta x)$ é menor que Δx apenas se $\Delta x > L_P$ (aproximadamente).

PARA MAIS REFERÊNCIAS NESTE ÂMBITO VER [21] E [22].

²¹ Ted Jacobson. Introduction to quantum fields in curved spacetime and the hawking effect. 2004

²² L. Ford. *Quantum Field Theory in Curved SpaceTime*

Termodinâmica de Buracos Negros

Relações Termodinâmicas

O efeito de Unruh deduzido na secção seguinte prevê que um observador acelerado observa radiação de corpo negro onde um observador inercial não observa nenhuma radiação. Noutras palavras, o espaço parece "quente" num referencial acelerado. O estado fundamental de um observador inercial é visto como um estado de equilíbrio termodinâmico com temperatura diferente de 0 para um observador uniformemente acelerado.

A equação fundamental deduzida por William Unruh em 1976 diz que a temperatura efectiva sentida por um detector uniformemente acelerado com aceleração a no vácuo é dada por²³

$$T_{Unruh} = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B} \quad (81)$$

²³ em unidades SI

Esta temperatura tem a mesma forma que a temperatura de Hawking de um buraco negro. Utilizando para o valor de a o valor da aceleração gravítica na superfície do buraco negro (por uma partícula teste que não perturbe muito o campo nesse local) $a := k_S = \frac{1}{4MG}$

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} (\approx \frac{1.227 \times 10^{23} \text{ kg}}{M} \text{ K}) \quad (82)$$

Daqui obtemos a famosa relação para a entropia de um buraco negro. Com a relação termodinâmica $dS = \frac{dQ}{T} = 8\pi M dQ$ e utilizando a relação relativista $E = M = Q$ ²⁴ obtemos

$$dS = 8\pi M dM = d(4\pi M^2) \quad (83)$$

Para um buraco negro temos que $R = 2M$ logo a área A é dada por

$$A = 4\pi R^2 = 16\pi M^2 \quad (84)$$

²⁴ A energia do calor que entra serve para aumentar a massa total

obtendo assim a relação

$$S = A/4 \quad (85)$$

Temperatura de Unruh

²⁵Para deduzirmos (81), vamos tratar o caso de aceleração constante. Temos 3 referenciais diferentes

- Referencial de Laboratório - $x^\mu = (t, x)$
- Referencial Acelerado (Próprio) - $x^\mu = (\tau, \zeta)$
- Referencial onde o observador acelerado está em repouso num dado instante - $x^\mu = (t', x')$

Em qualquer referencial inercial, pelos princípios de relatividade restrita

$$u_\mu u^\mu = 1 \implies 0 = \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 2u_\mu a^\mu \quad (86)$$

No referencial em que o observador em aceleração está momentaneamente em repouso

$$u'_\mu = (1, 0) \implies a'^\mu = (0, A) \quad (87)$$

Aqui A é a aceleração ordinária a' nesse referencial, tendo

$$u'^0 = \frac{dt'}{d\tau} \implies \frac{d}{d\tau} = \frac{dt'}{d\tau} \frac{d}{dt'} = u'^0 \frac{d}{dt'} \quad (88a)$$

$$A = \frac{d^2 x'}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}(u'^0 \frac{dx'}{dt'}) = \frac{d}{d\tau}(u'^0 v') = a' \quad (88b)$$

Aceleração constante um referencial de laboratório é impossível pois isto implicava que o observador poderia viajar mais rápido que a velocidade da luz.

A trajectória de um observador acelerado vai obedecer à equação diferencial que advém de $u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 = 1$

$$\left(\frac{du^0}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{du^1}{d\tau}\right)^2 = a_\mu a^\mu = a'_\mu a'^\mu = -a'^2 \quad (89)$$

A solução sujeita às condições iniciais $x^\mu(0) = (0, \frac{1}{a'})$, $u^\mu(0) = (1, 0)$ (ou seja, a partícula em $t = \tau = 0$ está em repouso em e em $x = \frac{1}{a'}$) é dada por

$$t = \frac{\sinh(a'\tau)}{a'}, x = \frac{\cosh(a'\tau)}{a'} \quad (90)$$

²⁵ Dedução efectuada com o auxílio do professor do Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico Gabriel Lopes Cardoso, investigador no CAMGSD.

Utilizando a lei de transformação entre coordenadas de laboratório (t, x) e coordenadas próprias (τ, ζ) , obtemos

$$t = \frac{\sinh(a'\tau)}{a'} + u^1 \zeta = \frac{(1 + a'\zeta)}{a'} \sinh(a'\tau) \quad (91a)$$

$$x = \frac{\cosh(a'\tau)}{a'} + u^0 \zeta = \frac{(1 + a'\zeta)}{a'} \cosh(a'\tau) \quad (91b)$$

Agora consideramos a quantização que efectuámos no espaço de Rindler (válido numa vizinhança do horizonte de eventos). Como estamos apenas a considerar um espaço-tempo a 1+1 dimensões, as coordenadas são (τ, ζ) . Definindo como em (60) a coordenada

$$\bar{\zeta} = \frac{\ln(1 + a'\zeta)}{a'} \quad (92)$$

obtemos a métrica

$$ds^2 = e^{2a'\bar{\zeta}} (d\tau^2 - d\bar{\zeta}^2) \quad (93)$$

A lei de transformação é assim dada por

$$t = \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \sinh(a'\tau) \quad (94a)$$

$$x = \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \cosh(a'\tau) \quad (94b)$$

Vimos também que a acção nestas coordenadas (ou seja, no referencial acelerado) toma a forma

$$I = \frac{1}{2} \int d\tau d\bar{\zeta} ((\partial_\tau \chi)^2 - (\partial_{\bar{\zeta}} \chi)^2) \quad (95)$$

No referencial de laboratório temos o espaço tempo de Minkowski, em que a acção toma a forma

$$I = \frac{1}{2} \int dt dx ((\partial_t \chi)^2 - (\partial_x \chi)^2) \quad (96)$$

Agora a parte quântica. Necessitamos de quantizar o campo. Definimos os operadores de criação e aniquilação no espaço de Rindler e o campo χ quantizado:

$$b(k) = \text{operador aniquilação} \quad (97a)$$

$$b^\dagger(k) = \text{operador criação} \quad (97b)$$

$$[b(k), b^\dagger(k')] = \delta(k - k') \quad (97c)$$

$$[b(k), b(k')] = [b^\dagger(k), b^\dagger(k')] = 0 \quad (97d)$$

$$\chi(\tau, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (e^{i(k\bar{\zeta} - |k|\tau)} b(k) + e^{-i(k\bar{\zeta} - |k|\tau)} b^\dagger(k)) \quad (98)$$

O vácuo de Rindler é definido como

$$b(k)|0_R \rangle = 0 \quad (99)$$

No espaço de Minkowski temos os operadores $a(k)ea^\dagger(k)$ tal como em Rindler, sendo aqui χ dado por

$$\chi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2|k|}} (e^{i(kx - |k|t)} a(k) + e^{-i(kx - |k|t)} a^\dagger(k)) \quad (100)$$

O vácuo de Minkowski é definido como

$$a(k)|0_M \rangle = 0 \quad (101)$$

Os quatro operadores definidos são diferentes, ou seja criam e aniquilam diferentes excitações no campo. Assim, o vácuo de Minkowski é diferente do vácuo de Rindler. Obtém-se a relação entre $a(k), a^\dagger(k), b(k)$ e $b^\dagger(k)$ comparando o lado esquerdo e direito de

$$\chi(t, x) = \chi(\tau, \bar{\zeta}) \quad (102)$$

De modo a simplificar este procedimento, passamos para coordenadas cone de luz definidas como

$$u = t - x, \quad v = t + x \quad (103a)$$

$$\bar{u} = \tau - \bar{\zeta}, \quad \bar{v} = \tau + \bar{\zeta} \quad (103b)$$

A relação entre cada uma destas variáveis é efectuada recorrendo a (94a) e (94b).

$$u = t - x = \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \sinh(a'\tau) - \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \cosh(a'\tau) = -\frac{e^{a'(\bar{\zeta} - \tau)}}{a'} = -\frac{e^{-a'\bar{u}}}{a'} \quad (104a)$$

$$v = t + x = \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \sinh(a'\tau) + \frac{e^{a'\bar{\zeta}}}{a'} \cosh(a'\tau) = \frac{e^{a'(\bar{\zeta} + \tau)}}{a'} = \frac{e^{a'\bar{v}}}{a'} \quad (104b)$$

Notamos que esta escolha de coordenadas simplifica os cálculos pois as diferentes coordenadas não se misturam $\rightarrow u = u(\bar{u})$ e $v = v(\bar{v})$.

Podemos então calcular qual a representação do campo nas coordenadas cone de luz

$$\begin{aligned}
 \chi(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2w}} (e^{-iw(t-x)} a(w) + e^{iw(t-x)} a^\dagger(w)) \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{-2w}} (e^{iw(t+x)} a(w) + e^{-iw(t+x)} a^\dagger(w)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2w}} (e^{-iwu} a(w) + e^{iwu} a^\dagger(w)) \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{-2w}} (e^{i\bar{w}v} a(w) + e^{-i\bar{w}v} a^\dagger(w)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2w}} (e^{-iwu} a(w) + e^{iwu} a^\dagger(w) + e^{-i\bar{w}v} a(-w) + e^{-i\bar{w}v} a^\dagger(-w)) \\
 &= A(u) + B(v)
 \end{aligned}$$

Temos agora a vantagem que $\chi(u, v)$ é a soma de uma parte dependente de u com outra dependente de v . Da mesma maneira, temos

$$\begin{aligned}
 \chi(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (e^{-i\Omega\bar{u}} b(\Omega) + e^{i\Omega\bar{u}} b^\dagger(\Omega)) \\
 &\quad + e^{-i\Omega\bar{v}} b(-\Omega) + e^{i\Omega\bar{v}} b^\dagger(-\Omega) \\
 &= P(\bar{u}) + Q(\bar{v})
 \end{aligned}$$

Como as duas coordenadas cones de luz não se misturam, temos que $A(u(\bar{u})) = P(\bar{u})$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dw \frac{1}{\sqrt{2w}} (e^{-iwu(\bar{u})} a(w) + e^{iwu(\bar{u})} a^\dagger(w)) &= \\
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\Omega \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (e^{-i\Omega\bar{u}} b(\Omega) + e^{i\Omega\bar{u}} b^\dagger(\Omega)) &
 \end{aligned}$$

Esta equação pode ser resolvida para $b(\Omega)$ e $b^\dagger(\Omega)$ efectuando uma transformada de Fourier nos dois lados da equação²⁶. No lado direito obtemos

²⁶ Ou seja, multiplicando por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\bar{u} e^{i\Omega\bar{u}}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\bar{u} e^{i\Omega\bar{u}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\Omega' \frac{1}{\sqrt{2\Omega'}} (e^{-i\Omega'\bar{u}} b(\Omega') + e^{i\Omega'\bar{u}} b^\dagger(\Omega')) &= \\
 \int_0^\infty d\Omega' \frac{1}{\sqrt{2\Omega'}} (\delta(\Omega - \Omega') b(\Omega') + \delta(\Omega + \Omega') b^\dagger(\Omega')) &
 \end{aligned}$$

ou seja

$$RHS = \begin{cases} \frac{b(\Omega)}{\sqrt{2\Omega}} & \text{para } \Omega > 0 \\ \frac{b^\dagger(-\Omega)}{\sqrt{-2\Omega}} & \text{para } \Omega < 0 \end{cases} \quad (105)$$

Para o lado esquerdo não obtemos uma relação tão simples:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\bar{u} e^{i\Omega\bar{u}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dw \frac{1}{\sqrt{2w}} (e^{-iw(\bar{u})} a(w) + e^{iu(\bar{u})} a^\dagger(w)) = \\ & \int_0^\infty dw \frac{1}{\sqrt{2w}} (a(w) \int d\bar{u} \frac{1}{2\pi} e^{i\Omega\bar{u} - iwu(\bar{u})} + a^\dagger(w) \int d\bar{u} \frac{1}{2\pi} e^{i\Omega\bar{u} + iwu(\bar{u})}) = \\ & \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{2w}} (a(w) \int \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i(\Omega\bar{u} + \frac{w}{a'} e^{-a'\bar{u}})}) + a^\dagger(w) \int \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i(\Omega\bar{u} - \frac{w}{a'} e^{-a'\bar{u}})}) \end{aligned}$$

Chegamos assim à relação entre $b(\Omega)$ e $a(w)$ (para o caso de $\Omega > 0$).

$$b(\Omega) = \int_0^\infty dw (\alpha_{w,\Omega} a(w) + \beta_{w,\Omega} a^\dagger(w)) \quad (106a)$$

$$\alpha_{w,\Omega} = \sqrt{\frac{|\Omega|}{w}} \int \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i(\Omega\bar{u} + \frac{w}{a'} e^{-a'\bar{u}})} \quad (106b)$$

$$\beta_{w,\Omega} = \sqrt{\frac{|\Omega|}{w}} \int \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i(\Omega\bar{u} - \frac{w}{a'} e^{-a'\bar{u}})} \quad (106c)$$

Para o caso de $\Omega < 0$, as relações são obtidas de maneira análoga ao cálculo anterior, igualando $B(v) = Q(\bar{v})$. Obtém-se também

$$b(\Omega) = \int_0^\infty dw (\alpha_{w,-\Omega} a(-w) + \beta_{w,-\Omega} a^\dagger(-w)) \quad (107)$$

Transformações como (106a) e (107) são chamadas de transformações de Bogolyubov. Os coeficientes $\alpha_{w,\Omega}$ e $\beta_{w,\Omega}$ são chamados de coeficientes de Bogolyubov.

Vamos agora calcular qual o número médio de partículas b com "momento" Ω no vácuo de Minkowski ($\Omega > 0$). Este valor no âmbito da segunda quantização é dado por²⁷

²⁷ onde se faz uso das relações (97c) e (97d)

$$\begin{aligned} & \langle 0_M | b^\dagger(\Omega) b(\Omega) | 0_M \rangle = \\ & \langle 0_M | \int_0^\infty dw (\alpha_{*w,\Omega} a^\dagger(w) + \beta_{*w,\Omega} a(w)) \int dw' (\alpha_{w',\Omega} a(w') + \beta_{w',\Omega} a^\dagger(w')) | 0_M \rangle = \\ & \int_0^\infty dw \int_0^\infty dw' \beta_{*w,\Omega} \beta_{w',\Omega} \langle 0_M | a(w) a^\dagger(w') | 0_M \rangle = \int_0^\infty dw |\beta_{w,\Omega}|^2 \neq 0 \end{aligned}$$

Este integral tem solução analítica. Para o encontrar, vamos primeiro encontrar a expressão para $\beta_{w,\Omega}$. Efectuando uma mudança de variáveis $y = e^{-a'\bar{u}}$ ficamos com

$$\beta_{w,\Omega} = -\sqrt{\frac{|\Omega|}{w}} \int_0^\infty \frac{dy}{2\pi} y^{-(\frac{i\Omega}{a'} + 1)} e^{-i\frac{w}{a'} y} \quad (108)$$

Para realizar esta integração, utilizamos as igualdades

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} \sin(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad \int_0^\infty x^{\mu-1} \cos(ax) dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (109)$$

Neste caso, $\mu = -i\frac{\Omega}{a'}$ e $a = \frac{w}{a'}$. Sabendo que $e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$, temos que efectuar dois integrais, obtendo

$$\beta_{w,\Omega} = \sqrt{\frac{|\Omega|}{4\pi^2 w}} \left(\frac{a'}{w}\right)^{-i\frac{\Omega}{a'}} \Gamma\left(i\frac{\Omega}{a'}\right) e^{-\frac{\Omega}{a'} \frac{\pi}{2}} \quad (110)$$

Finalmente, precisamos de encontrar o módulo ao quadrado deste resultado. Disposmos de uma relação extremamente útil

$$\left|\Gamma\left(i\frac{\Omega}{a'}\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\frac{\Omega}{a'} \sinh\left(\pi\frac{\Omega}{a'}\right)} \quad (111)$$

$$\int_0^\infty dw |\beta_{w,\Omega}|^2 = \frac{\Omega}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dw}{w} \frac{\pi}{\frac{\Omega}{a'} \sinh\left(\pi\frac{\Omega}{a'}\right)} e^{-\frac{\Omega}{a'} \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2\pi} \frac{e^{-\frac{\Omega\pi}{a'}}}{e^{\frac{\pi\Omega}{a'}} - e^{-\frac{\pi\Omega}{a'}}} \int_0^\infty dw w^{-1} \quad (112)$$

em que usando

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp e^{ipx} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty dk k^{-1+ix/a} \quad (113)$$

chegamos por fim ao resultado

$$\langle 0_M | b^\dagger(\Omega) b(\Omega) | 0_M \rangle = \frac{\delta(0)}{e^{2\pi\Omega/a} - 1} \quad (114)$$

para $\Omega < 0$ obtemos um resultado análogo a (114). Para arbitrário Ω obtemos o resultado

$$\langle 0_M | b^\dagger(\Omega) b(\Omega) | 0_M \rangle = \frac{\delta(0)}{e^{2\pi|\Omega|/a} - 1} \quad (115)$$

Comparando com a distribuição de Bose-Einstein

$$n(\Omega) = \frac{1}{e^{|\Omega|/T} - 1} \quad (116)$$

vemos que a expressão (115) implica a temperatura de Unruh

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (117)$$

Concluimos assim que um observador em movimento através do vácuo de Minkowski tem a impressão de se mover num "banho térmico" de partículas b com temperatura T dada por (117).

Esta temperatura diverge à medida que o observador se aproxima do horizonte de eventos ($\rho \rightarrow 0$)²⁸. Isto significa que, quando o observador se aproxima do horizonte a uma distância menor que a distância de Planck, esta descrição já não é válida. Temos de invocar uma teoria de Gravidade Quântica. De acordo com os criadores da complementaridade de buracos negros, o local onde ocorre este efeito é chamado o "horizonte alongado" (*stretched horizon*). Este é uma membrana fictícia que estudaremos com mais detalhe.

²⁸ Pois no espaço de Rindler temos $a \sim \frac{1}{\rho}$

VISÃO HEURÍSTICA DE DIFERENTES TIPOS DE VÁCUO

Em suma, um observador que passe o horizonte de eventos não vê nada de especial, mas um observador que resista à aceleração e tente ficar mesmo acima do horizonte, encontra partículas altamente energéticas a sair do horizonte de eventos.

Para o observador que cai, o espaço é aproximadamente descrito por uma métrica de Minkowski, enquanto que para o observador acima do horizonte de eventos terá uma aceleração enorme. Assim, pela teoria de campo em espaços curvos, temos dois estados de vácuo diferentes. Enquanto um não encontra nada de especial no horizonte e passa sem problemas, o outro verá o vácuo num banho térmico de enorme temperatura.

Visão Heurística da Radiação de Hawking

Uma visão deste efeito (descrito no início do capítulo) em que o buraco negro perde energia (logo massa) consiste nas flutuações de vácuo por pares partícula/antipartícula virtuais que estão a ser criados constantemente no vácuo segundo a teoria de QED. Caso este fenómeno aconteça junto do horizonte de eventos, um membro do par virtual pode escapar para infinito, enquanto que o seu parceiro cai para o buraco negro. Nesta imagem, a radiação de Hawking consiste nas partículas que escapam.

Como a energia total das partículas virtuais soma a 0, cada partícula com frequência w deixando o buraco negro está correlacionada com a partícula de frequência $-w$ (frequência negativa corresponde a um observador externo estacionário) que cai no buraco negro, reduzindo a sua massa.

Antes de Hawking, um buraco negro esféricamente simétrico era considerado completamente inerte. De facto, não existe nenhuma lei de conservação em relação a buracos negros, por isso porque não pode um buraco negro simplesmente decair? Este decaimento é puramente quântico e térmico.

QUANTO TEMPO DEMORA UM BURACO NEGRO A EVAPORAR?

Utilizando a lei de Stefan-Boltzmann, a radiação de Hawking terá uma potência P relacionada com a temperatura T do corpo negro pela lei

$$P = \sigma AT^4 = (\sigma \hbar^4 c^8)(256\pi^3 g^2 k_B^4 M^2) := \frac{K}{m^2} \quad (118)$$

onde $K = 3.563 \times 10^{32} Wkg^2$. Dado que a potência da radiação de

Hawking é a taxa de perda de energia do buraco negro, podemos escrever $P = -\frac{dE}{dt}$. Relacionando $E = mc^2$, podemos escrever

$$P = -c^2 \frac{dm}{dt} \quad (119)$$

Podemos assim equacionar as duas equações acima, integrando a massa desde M (a massa inicial do buraco negro) até 0 e o tempo de 0 até τ , obtendo

$$\tau = \frac{c^2}{3K} M^3 = 8.42 \times 10^{-17} M^3 \text{ s} \quad (120)$$

Para um buraco negro intermédio, temos que $M \approx 10^{33} \text{ Kg}$, logo o seu tempo de vida seria maior que a idade do universo.²⁹

Generalização e Retrodifusão

Hawking calculou também produção de partículas em campos quânticos por buracos negros carregados e rotativos. Existe também o cálculo para emissão de fermiões e gravitões, perturbações linearizadas da métrica. Em todos os casos, encontramos um espectro

$$\langle N_w \rangle = \frac{\Gamma_w}{e^{\frac{2\pi(w-\mu)}{\hbar k}} \pm 1} \quad (121)$$

onde +1 corresponde a fermiões e -1 corresponde a bosões. Em termodinâmica, μ é o potencial químico. Para a emissão de um buraco negro, μ é tal que um buraco negro carregado emite preferencialmente partículas sem massa, carregadas, do mesmo sinal que a sua própria carga. Buracos negros rotativos emitem preferencialmente partículas com o mesmo tipo de momento angular. Assim, através de radiação de Hawking, os buracos negros podem perder velocidade angular e podem descarregar, caso existam campos que carreguem o mesmo tipo de carga que o buraco negro.

O factor Γ_w ³⁰ entra em jogo pois nem todos os pacotes de onda conseguem escapar até ao infinito (devido ao potencial que vimos anteriormente). Assim, Γ_w é apenas o coeficiente de absorção clássico de "scattering" para um campo escalar para fora do buraco negro.

Nos cálculos anteriores, a métrica estava fixa. Mesmo não tendo uma teoria quântica da gravidade de modo a determinar como a métrica evolui com a emissão quântica de partículas, assumimos que a massa do buraco negro diminui. Para um buraco negro neutro, a temperatura aumenta à medida que a massa diminui, logo a taxa de evaporação aumenta com o tempo. Buracos negros muito pequenos tem uma curvatura muito grande, logo em algum mo-

²⁹ É de notar que no cálculo da radiação de Hawking assumimos que a massa é uma constante. Esta é uma boa aproximação quando $\frac{dM}{dt} \ll M$ mas falha para os estágios finais da evaporação

³⁰ Apresentamos apenas a interpretação para a inserção deste factor no cálculo utilizando a métrica de Riemann

mento do tempo, a descrição clássica da nossa teoria não é válida.

Buracos Negros Carregados

Contudo, a situação é diferente para produção de partículas num buraco negro carregado. A métrica para um buraco negro carregado, estático e esfericamente simétrico é dada pela solução de Reissner-Nordstrom

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 d\Omega^2 \quad (122)$$

onde Q é a carga do buraco negro. Passamos agora a ter duas soluções para o horizonte de eventos

$$r_{\pm} = M(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q^2}{M^2}}) \quad (123)$$

Notamos que apenas existe horizonte para $M \geq Q$. Para $M < Q$ não existe horizonte e o espaço tempo tem o que se chama uma singularidade "nua". O caso $M = Q$ é chamado de buraco negro extremo.

Definição 11. *Gravidade Superficial k de um Buraco Negro carregado*

$$k = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2}} = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}$$

Com esta definição, a temperatura deste tipo de buraco negro é dada por ($\hbar = c = 1$) $T = \frac{k}{2\pi}$. à medida que $M \rightarrow Q$ a gravidade superficial $k \rightarrow 0$. Logo, a temperatura de um buraco negro extremo é 0. Logo, se assumirmos que não existem cargas presentes para descarregar o buraco negro, o cálculo semiclássico diz que um buraco negro com $M > Q$ evapora até $M = Q$, parando o processo de evaporação do buraco negro.

Entropia de um buraco negro

AS DUAS SECÇÕES SEGUINTE ESTÃO DE ACORDO COM [31]

Como vimos no início do capítulo, encontrámos para o buraco negro um valor de entropia de $S_{BH} = \frac{A}{4L_p^2}$ (reintroduzindo as constantes \hbar, G e c . Este valor é enorme. Que microestados estão a ser contados?

Quaisquer que sejam os estados, S_{BH} é o limite inferior para a entropia emitida para o mundo exterior à medida que o buraco negro

³¹ James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4

evapora, i.e. a informação mínima trazida pela presença do buraco negro.

Como experiência, podíamos enviar energia para o buraco negro, fazendo-o durar para sempre, emitindo este uma quantidade enorme de entropia. Assim, só faz sentido falar acerca da entropia mínima. Este limite é atingido quando o buraco negro evapora reversivelmente para um banho térmico a uma temperatura infinitesimalmente menor que a temperatura de Hawking (evaporação para vácuo é irreversível, logo a entropia total no exterior aumenta ainda mais, com um valor calculado de $S_{emitido} \sim (4/3)S_{BH}$).

LIMITE DE BEKENSTEIN

Este é um limite superior na entropia S que está contida no interior duma região finita do espaço que contém energia infinita ou, da mesma maneira, a quantidade de informação máxima precisa para descrever perfeitamente um sistema física até ao nível quântico. Isto implica que a informação de um sistema físico, ou a informação necessária para descrever perfeitamente o sistema é finita caso a região seja finita e a energia finita. Podemos expressar esse limite como

$$S \leq \frac{2\pi k_B R E}{\hbar c} \quad (124)$$

onde R é o raio da esfera que contém o sistema e E é a energia total incluindo as massas em repouso. É de notar que a constante de Newton G não está presente na expressão. Acontece que a entropia de Bekenstein-Hawking num buraco negro de Schwarzschild satura exactamente esse limite.

PARA MAIS REFERÊNCIAS NESTE ÂMBITO VER [32] E [33].

³² Jennie Traschen. An introduction to black hole evaporation. 2000

³³ Timothy Clifton. Properties of black hole radiation from tunneling. 2008

Conservação da Informação

ESTE CAPÍTULO RESULTA NUM RESUMO DOS CONCEITOS EXPLICITADOS EM [34],[35] E [36].

Física Clássica

A conservação de energia é um conceito já estabelecido na física com um estatuto sólido dado pelo teorema de Noether. Já a questão de conservação da informação tem que ser estudada com mais cuidado.

Em física clássica, este princípio está embebido no teorema de Liouville. Este diz que a densidade do sistema de pontos no espaço de fase é constante. Tendo uma função de distribuição $\rho(p, q, t)$ ³⁷, a equação que rege a evolução desta ao longo do tempo é

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial\rho}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0 \quad (125)$$

Assim, temos que a função de distribuição é constante ao longo de qualquer trajectória no espaço de fase. Isto é equivalente a dizer que o volume no espaço de fase é constante. Neste sentido, a quantidade de informação é conservada.

No sentido prático a informação é perdida pois na maior parte dos casos de interesse, a região Γ que estamos a considerar torna-se muito complicada (tal como um fractal), e se "granularmos" o espaço de fase ("coarse gain"), a região Γ aumenta. Como definição de granulação ("coarse graining"), se pegarmos em cada ponto do espaço de fase e o envolvermos por esferas sólidas de volume fixo, a união dessas esferas é a granulação do volume do espaço de fase, que aumenta, Esta é a origem da segunda lei da termodinâmica.

³⁴ James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4

³⁵ Jennie Traschen. *An introduction to black hole evaporation*. 2000

³⁶ Samir D. Mathur. *The information paradox: A pedagogical introduction*. 2011

³⁷ $\rho(p, q)d^n q d^n p$ determina a probabilidade de o sistema estar num volume infinitesimal $d^n p d^n q$ no espaço de fase, onde o sistema possui n partículas

Mecânica Quântica

Em mecânica quântica, a conservação da informação é expressa através da unitariedade da matriz S . O análogo do volume do espaço de fase é a dimensionalidade do subespaço

$$N = \text{Tr}P \quad (126)$$

Onde P é o operador de projecção no subespaço. A unitariedade da evolução no tempo implica que N é conservado no tempo. Ao invés desta definição, vamos utilizar o conceito de entropia. Em vez de especificar uma região Γ no espaço de fase, especificamos a densidade de probabilidade $\rho(p, q)$ no espaço de fase. A generalização do volume é dado pela exponencial da entropia $V_\Gamma \rightarrow e^S$, onde

$$S = - \int dqdp \rho(p, q) \ln(\rho(p, q)) \quad (127)$$

Para mecânica quântica, definimos a entropia granulada "fina" ou entropia de Von Neumann como

$$S = -\text{Tr}(\rho \log(\rho)) \quad (128)$$

A entropia é uma estimativa do logaritmo do número de estados quânticos que compõe o ensemble. Tanto em mecânica clássica como em quântica, as equações do movimento implicam a conservação exacta de S para um sistema fechado e isolado.

Princípio da Equivalência

A forma mais simples do princípio de equivalência diz que o campo gravitacional é localmente equivalente a um referencial acelerado. Como vimos nas secções anteriores, isto implica que um observador em queda livre no buraco negro não encontra efeitos gravíticos excepto pelas forças de maré, ou equivalentemente, pelas componentes da curvatura que já encontrámos, que têm um valor pequeno, da ordem de

$$R \sim \frac{1}{M^2} \quad (129)$$

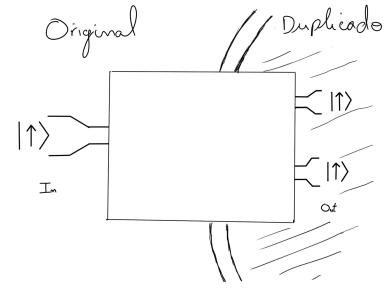
Tendo a métrica de Rindler, vimos que não existem efeitos de maior no horizonte de eventos.

Máquina Quântica de Não-Clonagem

Um dos princípios mais enraizados na teoria quântica vem do princípio de incerteza de Heisenberg - a informação não pode ser

duplicada. Isto diz que uma máquina Quântica de clonagem de informação não pode ser construída. Esta é uma máquina que inserindo informação, por exemplo do spin de uma partícula, ela produz a informação original e uma copiada.

Para vermos porque é que uma máquina destas é impossível, vamos efectuar a experiência com a máquina representada à direita. Pela construção desta máquina, se inserirmos um spin para cima $|\uparrow\rangle$ em z , vamos obter



$$|\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle \quad (130)$$

Da mesma maneira, se inserirmos um spin para baixo $|\downarrow\rangle$ em z , vamos obter

$$|\downarrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle \quad (131)$$

Supomos agora que inserimos uma partícula com spin polarizado no eixo dos x no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$. Os princípios gerais da mecânica quântica requerem que o estado evolua linearmente. Assim, pelas equações anteriores

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle) \quad (132)$$

Por outro lado, caso a máquina funcione como esperado, ela deve duplicar a informação completa, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \\ &\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle |\downarrow\rangle) + \frac{1}{2}|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

Este estado é completamente diferente do estado que vimos anteriormente. Assim, o princípio da linearidade implica a não existência deste tipo de máquina. Este viola o princípio de incerteza de Heisenberg.

Paradoxo da Informação num Buraco Negro

Foi em 1976 que Stephen Hawking levantou esta questão, perguntando se a informação era perdido no processo de formação e evaporação de buracos negros. Esta perda de informação é no sentido de granulação fina, um conceito que já encontrámos anteriormente. Ou seja, o primeiro princípio da conservação da informação que vimos na secção anterior seria violado num buraco negro.

Como vimos, aplicando teoria de campo a espaço-tempo curvo, encontrámos valores divergentes para a temperatura na aplicação

desta teoria numa vizinhança em torno do horizonte de eventos. Isto implica uma densidade de entropia infinita no horizonte em vez do valor correcto.

Estados puros e estados mistos

Definição 12. *Matriz Densidade* Matriz que descreve um sistema quântico num estado misto, um ensemble estatístico de vários estados quânticos, em contraste com um estado puro, descrito este apenas por um único vector de estado. Supondo que um sistema quântico pode ser encontrado no estado $|\psi_1\rangle$ com probabilidade p_1 , ou pode ser encontrado no estado $|\psi_2\rangle$ com probabilidade p_2 e por aí adiante. A matriz densidade para este sistema é dada por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

O valor esperado de qualquer observável A é dado por

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \text{tr}(\rho A)$$

Em mecânica quântica, um sistema quântico é representado por um ket $|\psi\rangle$. Um sistema quântico formado apenas por um destes kets é chamado um estado puro. Caso contenha mais como na definição (12) é chamado um estado misto. Como exemplo temos a polarização da luz, em que o fóton pode estar num estado de superposição de polarizações esquerda e direita.

Argumento de Stephen Hawking

A experiência que Hawking visionou foi a de deixar um buraco negro formar-se por matéria ordinária e depois evaporar em radiação através do processo de Radiação de Hawking. De acordo com as leis usuas da mecânica quântica, o estado de um sistema em qualquer tempo é descrito por uma função de onda. Hawking argumentou que depois da evaporação não existe uma função de onda definida, mas uma matriz densidade.

PASSÁMOS DE UM ESTADO PURO PARA UM ESTADO MISTO.

A informação foi perdida, porque agora existe apenas uma dada probabilidade de o sistema estar numa dada função de onda, enquanto que antes da evaporação tínhamos a informação total sobre a função de onda. Nas palavras dele, *além de Deus jogar aos dados, de vez em quando ele confunde-nos atirando-os para sítios onde eles não podem ser vistos.*

Vamos deitar um olhar mais aprofundado ao argumento da perda de informação. Supomos que um experimentalista fora do buraco negro pega num par de spins entrelaçados $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$ e atira o primeiro para o buraco negro. O princípio da equivalência diz que nada de especial acontece no horizonte, logo o spin passa livremente para o interior. Mas agora o exterior do buraco negro está entrelaçado com o seu interior e, por si só, o exterior é um estado misto. O spin interior não pode escapar, logo quando o buraco negro decai, o estado misto no exterior do buraco negro é tudo o que resta. Dizemos que o buraco negro efectuou uma transformação *não unitária*, que viola as leis da mecânica quântica. De facto, este processo ocorre a toda a hora sem o experimentalista estar envolvido: a evaporação de Hawking é na verdade devida a produção de pares entrelaçados, escapando um e o outro ficando para trás no horizonte, logo o exterior fica sempre num estado misto.

Complementaridade vs Firewall

Complementaridade

Horizonte Alongado (Stretched Horizon)

Esta ideia (expressa de acordo com [38]) advém do facto de que muito perto do horizonte de eventos, vimos que a temperatura divergia, logo a entropia também diverge (este argumento pode ser demonstrado a partir das relações termodinâmicas). Mas vimos também que a entropia tem um valor finito de $S = \frac{Ac^3}{4G\hbar} = \frac{A}{4l_p^2}$. A teoria de campo livre fornece demasiada entropia muito perto do horizonte.

Precisamos de alguma teoria que nos dê um número de graus de liberdade a tender para 0 muito perto do horizonte. Vamos supor que a teoria de campo é adequada até uma distância da escala ϵ . De modo a que a entropia a uma distância maior que ϵ não exceda o valor que obtivemos para a entropia, devemos ter a seguinte desigualdade (aproximadamente)

$$\epsilon < l_p \tag{133}$$

A distâncias menores que o comprimento de Planck, os graus de liberdade devem ser quase inexistentes. Isto conduz-nos à ideia de que o horizonte matemático deve ser substituído por uma distância aproximadamente de um comprimento de Planck do horizonte matemático.

Definição 13. *Horizonte Alongado*

1. O horizonte alongado é uma superfície fronteira equipada com graus de liberdade que aparecem no Hamiltoniano quântico utilizado para descrever o mundo observável.
2. A métrica perto do horizonte de eventos é dada pela métrica de

³⁸ John Uglum Leonard Susskind, Lárus Thorlacius. The stretched horizon and black hole complementarity. 1993

Rindler

$$ds^2 = \rho^2 dw^2 - d\rho^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (134)$$

O horizonte alongado é a superfície

$$\rho = \rho_0 \quad (135)$$

onde ρ_0 é um comprimento da ordem do comprimento de Planck.

Esticar o horizonte tem outros benefícios. Em vez do tipo-luz, o sistema no horizonte alongado é do tipo tempo. Assim, o conceito de dinâmica e evolução de um sistema pode ocorrer no horizonte alongado. Este horizonte possui várias propriedades interessantes.

- Possui viscosidade - comporta-se como um fluido viscoso.
- Possui resistividade eléctrica de 377Ω - se um observador se suspender logo acima do horizonte alongado, observa um fluxo intenso de radiação que aparentemente emana da membrana.
- É descrito por leis ordinárias da termodinâmica - A entropia de um buraco negro é proporcional à área do horizonte alongado.

Se o observador suspenso acima do horizonte alongado cair no buraco negro, tentando determinar se a membrana é real, a membrana desaparece. Contudo, não existe maneira de reportar a algum observador exterior a não-existência da membrana, logo existe *complementaridade* entre observações efectuadas por observadores que caem no buraco negro passando o horizonte de eventos e observadores distantes.

POSTULADOS DA COMPLEMENTARIDADE DE BURACOS NEGROS - [39] E [40]

- O processo de formação e evaporação de um buraco negro, visto por um observador distante, pode ser descrito inteiramente no contexto de teoria quântica usual. Em particular, existe uma matriz S unitária que descreve a evolução de matéria em queda livre para a sua saída em radiação de Hawking.
- Fora do horizonte alongado de um buraco negro massivo, a física pode ser descrita em boa aproximação por um conjunto de equações semi-clássicas.
- Para um observador distante, um buraco negro é visto como um sistema quântico com níveis discretos de energia. A dimensão do subespaço de estados descrevendo um buraco negro de massa M é dada pela exponencial da entropia de Bekenstein $S(M)$.

³⁹ Leonard Susskind. Singularities, firewalls, and complementarity. 2012a

⁴⁰ Dong-han Yeom Bum-Hoon Lee. Status report: black hole complementarity controversy. 2013

- Um observador em queda livre não encontra nada fora do ordinário quando atravessa o horizonte.

Com isto em mente, podemos rever o argumento de Hawking. Talvez a dinâmica no horizonte copie o spin à medida que este decresce e envia a cópia com a radiação de Hawking mais tarde. Contudo, já vimos que sistemas deste tipo vão contra o princípio de não-clonagem.

Talvez a informação dentro do horizonte escape no último instante da evaporação, quando o buraco negro fica da ordem do comprimento de Planck e passamos a não ter geometria clássica. Este argumento possui muitos problemas por si só e por enquanto é descartado.

Em 1993, Leonard Susskind em colaboração com Larus Thorlacius e John Uglum, a partir de ideias de Gerard 't Hooft e John Preskill, tentaram tornar preciso o tipo de comportamento não-local necessário para não existir perda de informação. Daqui nasceu o princípio da complementaridade de buracos negros.

Definição 14. *Princípio de Complementaridade de Buracos Negros* Diferentes observadores vêem o mesmo bit de informação em diferentes locais. Um observador fora do buraco negro vê-o na forma de radiação de Hawking, e um observador em queda livre no buraco negro irá vê-lo no seu interior. Nenhum observador vê a informação em dois lugares, tal como em complementaridade da mecânica quântica, nenhum observador vê com certeza a posição e a velocidade de uma partícula.

Este processo parece clonagem mas é um pouco diferente. Existe apenas um bit no espaço de Hilbert, mas não podemos dizer onde está. Desistimos de localidade mas não da mecânica quântica. Outro aspecto da complementaridade é de que o observador externo vê o horizonte como uma membrana quente que pode radiar informação, enquanto que o observador em queda livre não vê aí nada de especial.

Argumento AMPS - Parede de Fogo ⁴¹ ⁴²

Definição 15. *Tempo de Retenção da Informação* Tempo necessário para extrair um único bit de informação sobre o estado inicial de um sistema. Antes da informação escapar para o exterior do buraco negro, temos de atingir um balanço entre entropia de entrelaçamento (não discutida neste trabalho), existindo um tempo em que a energia escapa, mas não informação.

⁴¹ Dong-han Yeom Bum-Hoon Lee. Status report: black hole complementarity controversy. 2013

⁴² Ahmed Almheiri et al (AMPS). Black holes: Complementarity or firewalls? 2013

EXPERIÊNCIA DA DUPLICAÇÃO DA INFORMAÇÃO

- Cria-se um par a e b com spins entrelaçados.
- Um observador A cai no buraco negro levando com ele a partícula de spin a . O partícula de spin b continua fora do horizonte.
- A envia um sinal com a para fora do buraco negro antes de encontrar a singularidade.
- Existe um observador B que está fora do horizonte de eventos. Este mede o estado de b e sabe qual este é. De seguida, B espera e mede a radiação de Hawking fora do horizonte de eventos e mede a informação a que está anexada pela radiação de Hawking depois do tempo de retenção da informação. Em princípio, B consegue saber qual a partícula de Hawking que contém a informação de a comparando com com o estado de b . Chamamos a esta informação h .
- B entra no buraco negro e encontra o sinal de A .
- Agora B sabe que tem duas cópias de estados quânticos, violando este o princípio de unitariedade.

Reverendo os princípios que foram assumidos nesta experiência, utilizámos 3 dos postulados de complementaridade. De seguida, utilizámos a relação área-entropia: o tempo de retenção da informação é M^3 e que a radiação de Hawking deve conter informação. Por último, assumimos nos 2 últimos passos que *existe um observador que consegue ler um bit de informação da radiação de Hawking*. Caso um destes princípios não seja satisfeito, a experiência de duplicação não pode estar correcta.

VALIDADE DO MODELO ⁴³

Um buraco negro tem distância espacial de

$$r_0 \sim M \quad (136)$$

(em unidades de Planck) e o observador B cai no buraco negro depois de um tempo

$$\tau \sim M^3 \quad (137)$$

que constitui o tempo semi-clássico para evaporação de um buraco negro e o tempo semi-clássico calculado para o tempo de retenção da informação (onde o buraco negro radia metade da sua entropia).

Estima-se que o A envia para B o sinal durante um tempo

$$\Delta t \sim e^{-\frac{\pi}{r_0}} \quad (138)$$

⁴³ John Uglum Leonard Susskind, LÁarus Thorlacius. The stretched horizon and black hole complementarity. 1993

Devido à relação de incerteza, é necessário utilizar uma energia

$$\Delta E \sim \frac{1}{\Delta t} \quad (139)$$

Caso $\Delta E > M$, um evento deste género é impossível de acontecer. Assim, caso

$$\Delta E \sim \frac{1}{\Delta t} = e^{\frac{\tau}{M}} > M(=\tau) > M \ln(M) \quad (140)$$

parece que a observação da duplicação de informação é impossível. Devido aos trabalhos de P. Hayden e J. Preskill, uma estimativa do tempo de retenção (caso um buraco negro funcione como um desorganizador rápido (*fast scrambler* - não discutido neste trabalho) dá um valor da ordem de $M \ln(M)$. Mas mesmo neste caso marginal, temos a relação $\Delta E > M$ e a complementaridade de buracos negros parece segura.

Vemos aqui dois tempos de retenção. São dois tempos diferentes, utilizados por dois autores diferentes em dois argumentos diferentes. Susskind e Thorlacius utilizaram R^3 para provar que B nunca iria observar duas cópias da informação. Hayden e Preskill utilizaram $R \ln(R)$ para provar que B não vê por pouco as duas cópias.

EXPERIÊNCIA DE AMPS (ALMHEIRI, MAROLF, POLCHINSKI, SULLY)⁴⁴

- Deixa-se evaporar o buraco negro em mais de metade da sua massa.
- Daqui resulta que a radiação de Hawking que começa a ser libertada (inicial) está entrelaçada com o que resta do buraco negro (visão heurística da radiação de Hawking).
- À medida que o buraco negro evapora, a radiação de Hawking em estágios mais tardios, como também está entrelaçada com o que resta do buraco negro (que estava entrelaçada com a radiação inicial), está entrelaçada com a radiação de Hawking inicial.
- Agora consideramos o observador A que cai no buraco negro. Ela atravessa o horizonte quando B ainda está perto deste.
- Pelo princípio da equivalência, A deve ver espaço plano. Mas ao atravessar o espaço plano (vácuo de Minkowski), A vai ver entrelaçamento entre modos fora e dentro do horizonte.
- Mas isto é uma contradição, pois a radiação de Hawking que está a ser produzida nesse momento não pode estar entrelaçada

⁴⁴ Ahmed Almheiri et al (AMPS). Black holes: Complementarity or firewalls? 2013

com dois sistemas diferentes (interior do horizonte e radiação de Hawking inicial).

A partir desta experiência, temos que abdicar de um dos nossos princípios. A ideia de AMPS é de que devemos abandonar o princípio da equivalência como a escolha mais conservativa. Assim, a falta de entrelaçamento entre modos fora do horizonte e dentro do horizonte implica uma parede de fogo fora do horizonte alongado (tal como o tratamento quântico do vácuo de Rindler). Assim, *A* bate na parede de fogo e não entra no buraco negro.

Dois argumentos

Podemos resumir estas duas ideias como

- Complementaridade - cada observador vê apenas uma cópia.
- Parede de Fogo - cada observador vê apenas um entrelaçamento.

Os autores AMPS dão argumentos adicionais que a teoria de campo pode ser modificada perto do horizonte, envolvendo medições cuidadosas da radiação inicial.

Bibliografia

- Rafael Bousso. Complementarity is not enough. 2012.
- Dong-han Yeom Bum-Hoon Lee. Status report: black hole complementarity controversy. 2013.
- Timothy Clifton. Properties of black hole radiation from tunneling. 2008.
- Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press, New York, 1992. ISBN 0-19-859686-3.
- Ahmed Almheiri et al (AMPS). Black holes: Complementarity or firewalls? 2013.
- Ewa Felinska. Carter-penrose diagrams and black holes. <http://www.ift.uni.wroc.pl/~blaschke/master/Felinska.pdf>.
- L. Ford. *Quantum Field Theory in Curved SpaceTime*.
- Ted Jacobson. Introduction to quantum fields in curved spacetime and the hawking effect. 2004.
- David C. Kay. *Tensor Calculus*. McGraw-Hill, 1988.
- James Lindesay Leonard Susskind. *An introduction to black holes, information and the string theory revolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, first edition, 2005. ISBN 978-981-256-083-4.
- John Uglum Leonard Susskind, L arus Thorlacius. The stretched horizon and black hole complementarity. 1993.
- Yasushiro Sekino Leonard Susskind. Fast scramblers. 2008.
- Samir D. Mathur. The information paradox: A pedagogical introduction. 2011.
- Leonard Susskind. Singularities, firewalls, and complementarity. 2012a.

Leonard Susskind. The transfer of entanglement: The case for firewalls. 2012b.

S.W.Hawking. Information loss in black holes. 2005.

P.K. Townsend. Black holes. 1997.

Jennie Traschen. An introduction to black hole evaporation. 2000.

Matt Visser. Heuristic approach to schwarzschild geometry. 2004.

Marc Wagner. Unruh effect. <http://theorie3.physik.uni-erlangen.de/~mewagner>, 2005.